第２講　図形と方程式

1　(1)　点 $(a,\ b)$ に関して点 $(p,\ q)$ と対称な点の座標を求めよ．

(2)　3 次関数 $y=x^3+Ax^2+Bx+C$ のグラフはある点に関して点対称である．その点の座標を求めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　2 定点 O(0, 0), A(2, 1) と円 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ の周上を動く点 P がある．3 点 O, A, P が同一直線上にないとき，次の問いに答えよ．

(1)　△OAP の重心の軌跡を求めよ．

(2)　△OAP の面積の最大値を求めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 原点Oから出る半直線 l と x 軸の正の向きとのなす角を θ とする $\left(ただし，0<\theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$.

A(2，0)，B(4，0) とし，点Pは l 上の点とする．OP $= r$ $(\neq 0)$ とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) cos∠OPA，cos∠OPB をそれぞれ r と θ を用いて表せ.

(2) 点Pが AP＋BP を最小にする l 上の点であるとき，∠OPA と ∠OPB の関係式を求めよ．また，このとき r を θ で表せ.

(3) 点Pが(2)の条件を満たすとき，点Pの描く軌跡を求め，図示せよ.

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第２講　図形と方程式

1 (1) 点 $(a,\ b)$ に関して点 $(p,\ q)$ と対称な点の座標を求めよ．
(2) 3 次関数 $y=x^3+Ax^2+Bx+C$ のグラフはある点に関して点対称である．その点の座標を求めよ．

(1) 求める点を $(X,\ Y)$ とおくと

$$\frac{X+p}{2}=a,\ \frac{Y+q}{2}=b \text{ より }\quad X=2a-p,\ Y=2b-q$$

ゆえに　$\boldsymbol{(2a-p,\ 2b-q)}$

(2) $(p,\ q)$ が $y=x^3+Ax^2+Bx+C$ 上にあるとき　$q=p^3+Ap^2+Bp+C$　……①

求める点を $(a,\ b)$ とし，(1)で求めた点 $(2a-p,\ 2b-q)$ が $y=x^3+Ax^2+Bx+C$ のグラフ上にあるとする．

$$2b-q=(2a-p)^3+A(2a-p)^2+B(2a-p)+C$$
$$=8a^3-12a^2p+6ap^2-p^3+4a^2A-4aAp+Ap^2+2aB-Bp+C \quad \text{より}$$
$$q=p^3-(A+6a)p^2+(12a^2+4aA+B)p+2b-8a^3-4a^2A-2aB-C \quad ……②$$

①，②が任意の p で成立するのは

$$A=-(A+6a)\ ,\ B=12a^2+4aA+B\ ,\ C=2b-8a^3-4a^2A-2aB-C$$

つまり　$a=-\dfrac{A}{3}$（このとき $B=12a^2+4aA+B$ は成立），$b=\dfrac{2}{27}A^3-\dfrac{1}{3}AB+C$　のとき．

ゆえに，求める点は　$\boldsymbol{\left(-\dfrac{A}{3},\ \dfrac{2}{27}A^3-\dfrac{1}{3}AB+C\right)}$

2 2 定点 O(0, 0)，A(2, 1) と円 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ の周上を動く点 P がある．3 点 O，A，P が同一直線上にないとき，次の問いに答えよ．
(1) △OAP の重心の軌跡を求めよ．
(2) △OAP の面積の最大値を求めよ．

OA：$y=\dfrac{1}{2}x$ と円 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ の交点の y 座標は

$$(2y-1)^2+(y-1)^2=1 \qquad 5y^2-6y+1=0 \qquad (y-1)(5y-1)=0 \quad \text{より} \quad y=1,\ \frac{1}{5}$$

よって，交点は　$(2,\ 1)$，$\left(\dfrac{2}{5},\ \dfrac{1}{5}\right)$　　題意より点 P はこの 2 点とは一致しない

(1) $\mathrm{P}(s,\ t)$ とおくと　$(s-1)^2+(t-1)^2=1$　……①

△OAP の重心の座標を $(X,\ Y)$ とすると　$X=\dfrac{2+s}{3}$，$Y=\dfrac{1+t}{3}$

つまり　$s=3X-2,\ t=3Y-1$　……②

①，②より　$(3X-3)^2+(3Y-2)^2=1 \qquad (X-1)^2+\left(Y-\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{1}{9}$

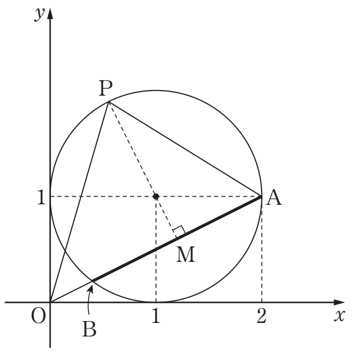
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

また　$(s,\ t)\neq(2,\ 1),\ \left(\dfrac{2}{5},\ \dfrac{1}{5}\right)$ より　$(X,\ Y)\neq\left(\dfrac{4}{3},\ \dfrac{2}{3}\right),\ \left(\dfrac{4}{5},\ \dfrac{2}{5}\right)$

よって，求める軌跡は　**円 $\boldsymbol{(x-1)^2+\left(y-\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{1}{9}}$　ただし，$\boldsymbol{\left(\dfrac{4}{3},\ \dfrac{2}{3}\right),\ \left(\dfrac{4}{5},\ \dfrac{2}{5}\right)}$ を除く**

(2)　$\mathrm{B}\left(\dfrac{2}{5},\ \dfrac{1}{5}\right)$ とすると，△OAP の面積が最大となるのは

弦 AB の垂直二等分線（円の中心 (1, 1) を通る）上に P があるときである．



(1, 1) と OA：$x-2y=0$ の距離は　$\dfrac{|1-2|}{\sqrt{1+4}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$　より

弦 AB の中点を M とすると　$\mathrm{PM}=1+\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}}$

また　$\mathrm{OA}=\sqrt{5}$

ゆえに，求める面積の最大値は　$\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}}=\boldsymbol{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　原点Oから出る半直線 l と x 軸の正の向きとのなす角を θ とする $\left(ただし，0<\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$.

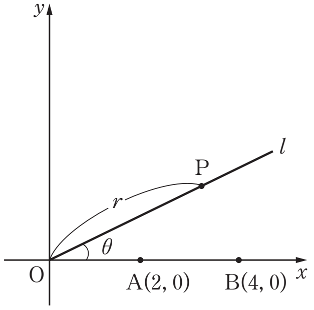
A(2, 0)，B(4, 0) とし，点Pは l 上の点とする．OP$=r$ $(\neq 0)$ とするとき，以下の問いに答えよ．

(1)　cos∠OPA，cos∠OPB をそれぞれ r と θ を用いて表せ．

(2)　点Pが AP+BP を最小にする l 上の点であるとき，∠OPA と ∠OPB の関係式を求めよ．また，このとき r を θ で表せ．

(3)　点Pが(2)の条件を満たすとき，点Pの描く軌跡を求め，図示せよ．

P$(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ とおける．



(1)　$\mathrm{AP}^2=(r\cos\theta-2)^2+(r\sin\theta)^2=r^2-4r\cos\theta+4$

よって　$\cos\angle\mathrm{OPA}=\dfrac{\mathrm{OP}^2+\mathrm{AP}^2-\mathrm{OA}^2}{2\cdot\mathrm{OP}\cdot\mathrm{AP}}$

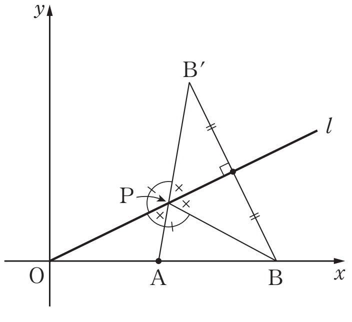
$$=\frac{r^2+r^2-4r\cos\theta+4-4}{2r\sqrt{r^2-4r\cos\theta+4}}$$

$$=\boldsymbol{\frac{r-2\cos\theta}{\sqrt{r^2-4r\cos\theta+4}}}$$

$\mathrm{BP}^2=(r\cos\theta-4)^2+(r\sin\theta)^2=r^2-8r\cos\theta+16$

よって　$\cos\angle\mathrm{OPB}=\dfrac{\mathrm{OP}^2+\mathrm{BP}^2-\mathrm{OB}^2}{2\cdot\mathrm{OP}\cdot\mathrm{BP}}=\boldsymbol{\dfrac{r-4\cos\theta}{\sqrt{r^2-8r\cos\theta+16}}}$

(2)　Bの l に関する対称点をB′とすると，AP+BP が最小となる点Pは AB′ と l の交点である．



∠OPB＝∠OPB′，∠OPA＋∠OPB′＝180° より

∠OPA＋∠OPB＝180°　である．

したがって　cos∠OPB＝−cos∠OPA より

$$\frac{r-4\cos\theta}{\sqrt{r^2-8r\cos\theta+16}}=-\frac{r-2\cos\theta}{\sqrt{r^2-4r\cos\theta+4}}$$

両辺を2乗して

$$\frac{r^2-8r\cos\theta+16\cos^2\theta}{r^2-8r\cos\theta+16}=\frac{r^2-4r\cos\theta+4\cos^2\theta}{r^2-4r\cos\theta+4}$$

$$1+\frac{16(\cos^2\theta-1)}{r^2-8r\cos\theta+16}=1+\frac{4(\cos^2\theta-1)}{r^2-4r\cos\theta+4}$$

$$4(r^2-4r\cos\theta+4)=r^2-8r\cos\theta+16$$

$$3r^2-8r\cos\theta=0$$

$r\neq 0$ より　$\boldsymbol{r=\dfrac{8}{3}\cos\theta}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(3)　(2)のとき　$P\left(\frac{8}{3}\cos^2\theta,\ \frac{8}{3}\sin\theta\cos\theta\right)$　これを $P(X,\ Y)$ とおくと

$X=\frac{4}{3}(1+\cos 2\theta)$ より　$\cos 2\theta=\frac{3}{4}X-1$

$Y=\frac{4}{3}\sin 2\theta$ より　$\sin 2\theta=\frac{3}{4}Y$

$\sin^2 2\theta+\cos^2 2\theta=1$ より　$\left(\frac{3}{4}X-1\right)^2+\left(\frac{3}{4}Y\right)^2=1$　　$\left(X-\frac{4}{3}\right)^2+Y^2=\frac{16}{9}$

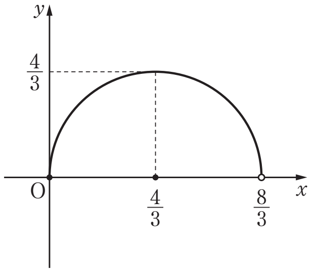
また，$0<\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ より　$0<2\theta\leqq\pi$

よって　$-1\leqq\cos 2\theta<1$　より　$0\leqq X<\frac{8}{3}$　　$0\leqq\sin 2\theta\leqq 1$　より　$0\leqq Y\leqq\frac{4}{3}$

ゆえに，求める軌跡は

円 $\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+y^2=\frac{16}{9}$　の $0\leqq x<\frac{8}{3}$，$0\leqq y\leqq\frac{4}{3}$ の部分.

図示すると右図実線部分.

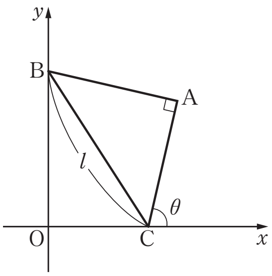


©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1 辺 BC を斜辺とする直角二等辺三角形 ABC が図の位置にある．BC$=l$ として次の問いに答えよ．

(1) 頂点 A の座標 $(x,\ y)$ を l と θ を用いて表せ．

(2) B，C がそれぞれ x 軸，y 軸の正の部分を動くとき，点 A の動く範囲を求め，かつ図示せよ．



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　円 C_1：$x^2+y^2=25$ と円 C_2：$(x-10)^2+(y-5)^2=50$ の2つの交点と原点を通る円を C_3 とする．次の問いに答えよ．

(1)　円 C_3 の中心と半径を求めよ．

(2)　点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が円 C_3 上を動くとき，$2y-x$ の最大値を求めよ．

(3)　円 C_1 と円 C_2 の2つの交点を通る円の中心の軌跡を求めよ．

(4)　円 C_1 と円 C_2 の2つの交点を通る円を C とする．点 $\mathrm{Q}(x,\ y)$ が円 C 上を動くとき，$2y-x$ の最大値が最小となる円 C の中心と半径を求めよ．

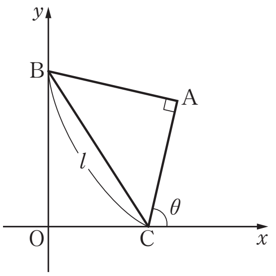
ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

九州大数学ⅠAⅡB　　第２講　図形と方程式　練習問題　解答

1　辺 BC を斜辺とする直角二等辺三角形 ABC が図の位置にある．BC$=l$ として次の問いに答えよ．

(1)　頂点 A の座標 $(x,\ y)$ を l と θ を用いて表せ．

(2)　B，C がそれぞれ x 軸，y 軸の正の部分を動くとき，点 A の動く範囲を求め，かつ図示せよ．



(1)　$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{BC}=\dfrac{l}{\sqrt{2}}$ より

三角比・三角関数の知識であるが，図形と方程式において「角度がらみ」で多用される．

点 A の y 座標は $\boxed{y=\mathrm{AC}\sin\theta}=\dfrac{l}{\sqrt{2}}\sin\theta$

また，$\angle\mathrm{BOC}+\angle\mathrm{BAC}=180^\circ$ より四角形 ABOC は円に内接する．

よって　$\angle\mathrm{ABO}=\theta$ より

点 A の x 座標は $\boxed{x=\mathrm{AB}\sin\theta}=\dfrac{l}{\sqrt{2}}\sin\theta$

ゆえに　$\boldsymbol{(x,\ y)=\left(\dfrac{l}{\sqrt{2}}\sin\theta,\ \dfrac{l}{\sqrt{2}}\sin\theta\right)}$

> A から x 軸への垂線の足を D とし，
> $\angle\mathrm{BCO}=135^\circ-\theta$ を利用すると
> $\mathrm{CD}=\mathrm{AC}\cos\theta=\dfrac{l}{\sqrt{2}}\cos\theta$
> $\mathrm{OC}=l\cos(135^\circ-\theta)$　より
> $\mathrm{OD}=\mathrm{OC}+\mathrm{CD}$
> $\quad=l\cos(135^\circ-\theta)+\dfrac{l}{\sqrt{2}}\cos\theta=\dfrac{l}{\sqrt{2}}\sin\theta$

(2)　B，C がそれぞれ x 軸，y 軸の正の部分を動くとき，$45^\circ<\theta<135^\circ$

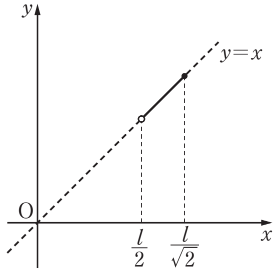
> 図形を利用して BC を動かしながら範囲を定める．

よって　$\dfrac{1}{\sqrt{2}}<\sin\theta\leqq 1$　より　$\dfrac{l}{2}<x\leqq\dfrac{l}{\sqrt{2}}$

ゆえに，求める軌跡は

直線　$\boldsymbol{y=x}$　の　$\boldsymbol{\dfrac{l}{2}<x\leqq\dfrac{l}{\sqrt{2}}}$ の部分．

図示すると，右図実線部分．



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 円 C_1：$x^2+y^2=25$ と円 C_2：$(x-10)^2+(y-5)^2=50$ の 2 つの交点と原点を通る円を C_3 とする．次の問いに答えよ．

(1) 円 C_3 の中心と半径を求めよ．

(2) 点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が円 C_3 上を動くとき，$2y-x$ の最大値を求めよ．

(3) 円 C_1 と円 C_2 の 2 つの交点を通る円の中心の軌跡を求めよ．

(4) 円 C_1 と円 C_2 の 2 つの交点を通る円を C とする．点 $\mathrm{Q}(x,\ y)$ が円 C 上を動くとき，$2y-x$ の最大値が最小となる円 C の中心と半径を求めよ．

(1) 2 円 C_1，C_2 の交点を通る図形は

$x^2+y^2-20x-10y+75+k(x^2+y^2-25)=0$ ……① （k：実数） と表される．

これが原点を通るとき　$75-25k=0$　より　$k=3$

よって，求める円 C_3 の方程式は

$4x^2+4y^2-20x-10y=0$　ゆえに　$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{5}{4}\right)^2=\frac{125}{16}$

したがって，中心は $\left(\boldsymbol{\frac{5}{2}},\ \boldsymbol{\frac{5}{4}}\right)$　半径は $\boldsymbol{\frac{5\sqrt{5}}{4}}$

(2) $2y-x=k$ とおき，$2y-x-k=0$ $\left(\text{傾き}\ \frac{1}{2}\ \text{の直線}\right)$ が円 C_3 と共有点をもつときの k の最大値を求める．

C_3 の中心 $\left(\frac{5}{2},\ \frac{5}{4}\right)$ と $2y-x-k=0$ の距離と C_3 の半径との関係 より　← **２グラフの位置関係を「距離」で判断**

$\frac{\left|\frac{5}{2}-2\cdot\frac{5}{4}+k\right|}{\sqrt{1+4}}\leqq\frac{5\sqrt{5}}{4}$　$|k|\leqq\frac{25}{4}$　よって　$-\frac{25}{4}\leqq k\leqq\frac{25}{4}$

ゆえに，求める最大値は　$\boldsymbol{\frac{25}{4}}$

(3) 2 円が異なる 2 交点 A，B をもつとき，その 2 円の中心はともに共通弦 AB の垂直二等分線上にある．よって，求める円の中心は，2 円 C_1，C_2 の共通弦の垂直二等分線である．

①で $k=-1$ のとき　$-20x-10y+100=0$　つまり　$y=-2x+10$

これが共通弦の方程式．

よって，求める軌跡は，C_1 の中心 $(0,\ 0)$ を通る傾き $\frac{1}{2}$ の直線 $\boldsymbol{y=\frac{1}{2}x}$ である．

(4) (3)より，円 C の中心は $(2t,\ t)$ とおける．半径は $\sqrt{(2t-3)^2+(t-4)^2}=\sqrt{5t^2-20t+25}$

(2)と同様に考えて　$\frac{|2t-2t+k|}{\sqrt{1+4}}\leqq\sqrt{5t^2-20t+25}$　$|k|\leqq5\sqrt{t^2-4t+5}$

よって　$-5\sqrt{t^2-4t+5}\leqq k\leqq5\sqrt{t^2-4t+5}$　より　$2y-x$ の最大値は　$5\sqrt{t^2-4t+5}$

これが最小となるのは　$5\sqrt{t^2-4t+5}=5\sqrt{(t-2)^2+1}$　より　$t=2$ のときである．

このとき C の中心は　**(4，2)**，半径は　$\boldsymbol{\sqrt{5}}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。